Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Noviembre 4 de 2016

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque **todas** las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo: 180 minutos**.

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$ si $x > 0$ y $f(0) = 1$.

(a) Pruebe que f *no* es continua en 0.

(b) Fije $0 < a < 1$ y sea $\delta(\epsilon) = \epsilon/a^2$. Pruebe que si $x, b \geq a$ y $|x - b| < \delta(\epsilon)$ entonces $|f(x) - f(b)| < \delta(\epsilon)$. Concluya que f es uniformemente continua en $[a, 1]$.

(c) Pruebe que f *no* es uniformemente continua en $(0, 1]$.

2. Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado y n un entero positivo. Dada $A \in M_{n\times n}(K)$, una matriz cuadrada $n \times n$, denotamos por $m_A(x) \in K[x]$ su polinomio minimal.

(a) Suponga que $q(x) \in K[x]$ es un polinomio tal que $q(x)$ y $m_A(x)$ *no* tienen factores en común. Muestre la matriz $q(A)$ es invertible.

(b) Muestre que $\lambda \in K$ es un valor propio de A si y sólo si $m_A(x) = 0$.

3.

(a) Enuncie explícitamente el lemma de Urysohn.

(b) Demuestre que si X es un compacto de Hausdorff existe una inmersión de X en $\mathbb{R}^N$ para algún N.

4. Sea X el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, y sea E la relación binaria sobre X definida por: $E(f, g)$ se cumple si y solamente si existe algún k en $\mathbb{N}$ tal que, para todo i mayor o igual a k, $f(i) = g(i)$.

(a) Demuestre que E es una relación de equivalencia.

(b) Demuestre que toda clase de equivalencia de E es enumerable.

5. Considere un grupo finito G.

(a) Sea X un conjunto de representates de las clases de conjugación de G y $Cl(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\}$. Demuestre que

$$|G| = \sum_{x \in X} |Cl(x)|.$$

(b) Suponga que G un grupo de orden p^n, donde p es un primo. Muestre que G tiene centro no trivial. Ayuda: $g \in G$ esta en el centro si y solo si $Cl(g) = \{g\}$.

6. Sea M una variedad diferencial con un sistema de cartas $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $i \in \mathcal{I}$.

(a) Construya un sistema de cartas para TM el haz tangente de M.

(b) Muestre que TM es orientable.

7. Se dejan caer n bolas, de manera independiente, en n urnas distintas.

(a) Hallar, para una urna específica, su probabilidad de quedar vacía.

(b) Sea V_n la cantidad de urnas que quedan vacías. Hallar V_n y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n}.$$

(c) Sea Q_n la cantidad de pares, $i < j$, tales que ambas urnas i y j quedan vacías. Hallar Q_n y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{n^2}.$$