Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

21 de mayo del 2018

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Las respuestas deben ser justificadas.

Tiempo máximo: 180 minutos.

Nombres:
Apellidos:
Cédula:

De aquí en adelante, favor marcar cada hoja únicamente con su cédula, **sin indicar su nombre.**

I. Demuestre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene $|\operatorname{sen} x - \cos x| \leq \sqrt{2}$.

II. Diga si la siguiente serie converge o no. En caso afirmativo, calcule su valor:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

III. Se quiere construir una caja cilíndrica (con piso y tapa) de $0{,}25\,m^3$ de volumen, cuyas medidas (la altura h y el radio r) hagan que la caja tenga la mínima área superficial posible. Encuentre tales medidas mediante el método de multiplicadores de Lagrange.

IV. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+3} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

1. Demuestre que existe una única matriz $A \in M(3;\mathbb{R})$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix}.$$

2. Diga si A es invertible.
3. Diga si A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y calcule A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.
4. Diga si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite en $\mathbb{R}$ y, en caso afirmativo, determine el valor de ese límite.

V. Sean $x, y :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de una variable que denotaremos t. Halle una base del espacio de soluciones del siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & \frac{1}{t}x(t) + ty(t) \\ y'(t) & = & y(t) \end{array} \right.$$

VI. Halle el resto de la división euclidiana de $2^{1000} + 3^{1000}$ por 11.

VII. Sea G un grupo finito. Dado un subgrupo $H \subset G$, denotaremos por $[G : H]$ el índice de H en G.

Sea X un conjunto finito. Suponga que G actúa sobre X a la izquierda. Dado $g \in G$ y $a \in X$, denotaremos por $g \cdot x$ la imagen de x por la acción de g, por $G \cdot x = \{y \in X \mid \exists\, g \in G, g \cdot x = y\}$la órbita de x y por $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ el estabilizador de x.

1. Recuerde la definición del índice de un subgrupo de un grupo finito.
2. Sea $x \in X$. Muestre que el estabilizador de x es un subgrupo de G.
3. Sea $x \in X$. Muestre que la órbita de x tiene $[G : G_x]$ elementos.