Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado, Parte II

19 de Mayo 2015

Tiempo 3 horas

1. Sean a, b reales y $f, g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a,\ b]$. Mostrar que existe $k > 0$ tal que $f(x) + k < g(x)$ para todo $x \in [a,\ b]$.

2. Sea $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x}{n(n+x)}$. Mostrar rigurosamente que f es difenciable y hallar su derivada.

3. Sea $\Omega = \{C, S\}^n$ cuyos elementos son $\omega = (a_1 \dots a_n)$ con $a_i \in \{C, S\}$ y defina la medida de probabilidad uniforme, es decir, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ para todo $\omega \in \Omega$. Se definen las variables aleatorias

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & a_i = C \\ -1 & a_i = S. \end{cases}$$

   (a) Mostrar que $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ para todo i.

   (b) Mostrar que las variables aleatorias son independientes.

4. sea X un espacio topológico

   (a) Mostrar que la unión de dos suconjuntos A, B conexos no disyuntos es conexa.

   (b) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para cada n. Demuestre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es conexo.

5. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $f : S^1 \to S^1$ definida por $f(z) = z^3$. Probar que f es un difeomorfismo local, pero no es un difeomorfismo global.

6. Sea G un grupo. Sea $Inn(G) = \{i_g : g \in G\}$, donde i_g es el automorfismo interno de G definido por $i_g(x) = gxg^{-1}$. Mostrar que $G/Z(G) \cong Inn(G)$.