

Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas

Examen de admisión al postgrado

2-05-2011

Tiempo 3 horas

Nivel Avanzado

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza éste espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.
3. **Para los aspirantes a la Maestría**, los problemas 6. y 7. no definirán su admisión. Éstos se usarán solamente para evaluar sus conocimientos avanzados en álgebra y análisis. Pase a solucionar éstos, solamente cuando halla trabajado plenamente los primeros cinco problemas.

Nombre y apellido:

2

1. Sea $b > 0$. Usar el método de residuos para evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + b^2}$$

Solución

2. Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera o falsa. Justifique su respuesta:

- (a) Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua, entonces f se puede extender a una función uniformemente continua con dominio $[a, b]$.
- (b) Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f se puede extender a una función continua con dominio $[a, b]$.

Solución

3. Sean $p > 1$ y $x > y > 0$. Demuestre que

$$py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y).$$

Solución

4. Demuestre que el grupo de automorfismos del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es isomorfo al grupo S_3 , el grupo de permutaciones de un conjunto con tres elementos.

Solución

Nombre y apellido:

6

5. Muestre que todo dominio de integridad con un número finito de elementos es un campo.

Solución

Nombre y apellido:

7

6. Sea $f(x) = x^4 - 2$.

- (a) Encuentre el campo de ruptura de $f(x)$ sobre \mathbb{Q} .
- (b) Encuentre el grupo de Galois de $f(x)$ sobre \mathbb{Q} .

Solución

7. Sea X un espacio normado. Mostrar que si una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X converge debilmente a x , entonces $x \in Y$, donde Y es la clausura del espacio vectorial generado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Solución