

Nombre y apellido:

1

Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas

Examen de admisión al postgrado

2-05-2011

Tiempo 3 horas

Nivel Básico

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza éste espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

Nombre y apellido:

2

1. Pruebe por inducción que $n^2 + 2n \leq 2^n$ para todo $n \geq 6$.

Solución

2. Una caja contiene 5 bolas azules, 4 bolas rojas y 9 bolas verdes. Se sacan 3 bolas de la caja.
- (a) Encuentre la probabilidad de sacar 3 bolas de color verde.
 - (b) Encuentre la probabilidad de sacar 3 bolas del mismo color.
 - (c) Encuentre la probabilidad de sacar 3 bolas de color diferente.

Solución

Nombre y apellido:

4

3. Pruebe que $1 + (1/2)^2 + (1/3)^2 + \cdots + (1/n)^2 \leq 2$ para todo n .

Solución

4. Hallar la serie de potencias centrada en $x = 0$ cuya suma es la función $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}$ y encuentre su intervalo de convergencia.

Solución

5. Se quiere hacer una pecera de vidrio con base en mármol sin tapa. Si el costo del mármol es 100 veces el costo del vidrio por metro cuadrado, y se quiere que la pecera tenga un volumen de un metro cúbico, calcule las dimensiones de la pecera que hacen que el costo de construirla sea mínimo.

Solución

6. Evaluar

$$\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$$

donde C es el segmento de recta que va desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el punto $(1, 2, 4)$.

Solución

7. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- (a) Hallar los valores propios de A .
- (b) Para cada valor propio, encontrar una base del espacio propio correspondiente.
- (c) Diga si A es diagonalizable y en caso afirmativo encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D , tales que $C^{-1}AC = D$.

Solución

8. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y sea $u : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Mostrar que el espacio vectorial $E/\ker u$ es de dimensión finita y que

$$\dim(E/\ker u) = \dim E - \dim \ker u.$$

Solución

9. Sea \mathbb{F}_q el cuerpo finito de q elementos y sea $n > 0$ un entero. Determinar el cardinal de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, el conjunto de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con entradas en \mathbb{F}_q .

Solución