Nombre y apellido:

Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado

22-10-2012

Tiempo 3 horas

Nivel Avanzado

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza éste espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa para la cual existen $A \geq 0$ y $B \geq 0$ tales que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |f(z)| \leq A|z| + B.$$

   Mostrar que f es una función polinomial de grado ≤ 1.

   Solución

2. Sea $E \subset \mathbb{R}$ acotado y sea $f : E \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Pruebe que existe una función $\bar{f} : \bar{E} \to \mathbb{R}$ continua que extiende a f. Pruebe que la afirmación es falsa si f solo es continua.

   Solución

3. Sea H un subgrupo normal de un grupo G y suponga que H es cíclico.

   (a) Demuestre todo subgrupo de H también es subgrupo normal de G.

   (b) Demuestre que si el índice $[G : H]$ es finito y h es un generador de H, entonces para todo $g \in G$ existen números enteros n, m tales que $g^n = h^m$.

   Solución

4. Demuestre que un espacio métrico conexo, con por lo menos dos elementos, tiene un número no contable de elementos.

   Solución

5. La selección C de fútbol gana cada partido con probabilidad $\frac{2}{3}$. La ronda clasificatoria al mundial tiene 12 partidos.

   (a) Cuál es el número esperado de victorias durante la ronda clasificatoria?

   (b) Cuál es el número esperado de victorias durante la ronda clasificatoria si sabemos que ganó sus primeros tres partidos?

   (c) Cuál es el número esperado de victorias durante la ronda clasificatoria si sabemos que ganó al menos tres de sus cuatro primeros partidos?

   Solución

6. Sea $f(x) = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$:

   (a) Demuestre que $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$.

   (b) Sea $K \supseteq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ una extensión y α una raiz de $f(x)$. Demuestre que $\alpha + 1$ y $\alpha - 1$ también son raices.

   (c) Calcule un campo de ruptura para $f(x)$ sobre $\mathbb{Z}_3$. Cual es la cardinalidad de éste campo?

   Solución

7. Sea H un espacio de Hilbert, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ débilmente convergente con $x_n \xrightarrow{w} 0$ $(n \to \infty)$. Muestre que $\lim_{n\to\infty} \|Kx_n\| = 0$ si $K : H \to H$ es un operador lineal compacto.

   Solución