

Nombre y apellido:

1

Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas

## Examen de admisión al postgrado

22-10-2012

Tiempo 3 horas

Nivel Básico

### **Importante**

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza éste espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

Nombre y apellido:

2

1. Calcule la integral:

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

Solución

Nombre y apellido:

3

2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Muestre que  $f$  es diferenciable en todo  $x$ .

**Solución**

Nombre y apellido:

4

3. Muestre que

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

para todo  $x > 0$ .

**Solución**

Nombre y apellido:

5

4. Encuentre la distancia entre el punto  $A(1, 1, 0)$  y la superficie  $xy + xz + yz = 0$ .

**Solución**

Nombre y apellido:

6

5. Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$y'(t) + y(t) - \int_0^t \sin(t - \xi) y(\xi) d\xi = 0, \quad y(0) = 1.$$

**Solución**

6. Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal cuya matriz canónica es  $A = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ . Muestre que  $T$  es la proyección ortogonal sobre una recta (que pasa por el origen) y determine la ecuación de ésta recta.

**Solución**

7. Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación lineal tal que  $T^3 = 0$ . Sea  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $T^2(\vec{v}) \neq \vec{0}$ .
- (a) Demuestre que  $B = \{\vec{v}, T(\vec{v}), T^2(\vec{v})\}$  es una base para  $\mathbb{R}^3$ .
  - (b) Encuentre la matriz de la transformación respecto a la base  $B$ .
  - (c) Diga si existe una base con respecto a la cual la matriz de  $T$  es diagonal? Justifique su respuesta.

**Solución**



8. Demuestre que, para todo número positivo  $n$ ,

$$\sum_{k=1}^n k^2 (-1)^{k-1} = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Solución**

Nombre y apellido:

10

9. Encuentre todas las soluciones del sistema de congruencias lineales  $x \equiv_5 8$ ,  $x \equiv_4 1$ ,  $x \equiv_{11} 7$ .

**Solución**