

Examen de admisión posgrado, nivel avanzada

Universidad de Los Andes Departamento de matemáticas

12-11-2013

tiempo 3 horas

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en todas las paginas que use.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza este espacio, pida papel blanco adicional al profesor que está en el salón.

SUERTE!

Nombre y apellido:

1) Sea X un espacio de Hausdorff y suponga que todo subespacio abierto de X (en particular X mismo) es compacto. Pruebe que X es finito.

Nombre y apellido:

2) Demuestre el lema de Poincaré para un disco abierto, es decir, sea $D_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ el disco abierto de radio 1 centrado en el origen, muestre que toda 1-forma en $D_1(0)$ cerrada es exacta.

Nombre y apellido:

3) Demuestre que el grupo de Galois del campo de ruptura del polinomio $p(x) = x^4 - x^2 - 2$ sobre \mathbb{Q} es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Nombre y apellido:

4) Sea R un anillo conmutativo con unidad

- a) Complete la definición "Un ideal $I \subseteq R$ es primo si...".
- b) Demuestre que $I \subseteq R$ es un ideal primo si y solo si R/I es un dominio de integridad.
- c) Suponga que cada elemento de R satisface $x^n = x$ para algun entero $n \geq 2$ (que puede depender de x). Demuestre que todo ideal primo de R es maximal.

Nombre y apellido:

5) a) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo k . Sea V^* el espacio dual. Define $\pi : V \rightarrow (V^*)^*$ por $\pi(v)(f) = f(v)$ para $v \in V$ y $f \in V^*$. Muestre que π es un isomorfismo.

b) Suponga que V tiene dimensión infinita. Muestre que π es inyectiva pero no es sobreyectiva.

Nombre y apellido:

6) Sea $C[0, 1]$ el conjunto de funciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} . Sea $d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$. Pruebe que d es una métrica. Pruebe que $C[0, 1]$ es completo con respecto a d .

Nombre y apellido:

7) Sean $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 9\}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en D tal que $f(1+i) \neq f(0)$. Además supongamos que $f(z)$ es analítica en $\overset{\circ}{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 9\}$

a) Suponga que $f(z) \neq 0$ para todos $z \in D$ y que $z_0 \in D$ satisface $|f(z_0)| \leq |f(z)|$. Muestre que $|z_0| = 9$.

b) ¿Podemos afirmar en el punto a) que $|z_0| = 9$ sin la condición $f(z) \neq 0$ para todos $z \in D$?

Nombre y apellido:

8) Una variable con distribución $\Gamma(n, \theta)$ tiene densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!\theta^n} x^{n-1} e^{-x/\theta}, \text{ para } x > 0.$$

Sean X, Y v.a. independientes con distribución gamma de parámetros (n, θ) y (m, θ) respectivamente, para n y m enteros positivos. Considere las variables

$$U = X + Y \quad V = \frac{X}{X + Y}$$

- a) Hallar la densidad conjunta del par (U, V) .
- b) Demuestre que U, V son independientes.