

# Examen de admisión posgrado, nivel básico

Universidad de Los Andes    Departamento de matemáticas

12-11-2013

tiempo 3 horas

## **Importante**

1. Escriba su nombre y apellido en todas las paginas que use.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza este espacio, pida papel blanco adicional al profesor que está en el salón.

SUERTE!

**Nombre y apellido:**

1) Sea  $p$  un primo y  $a$  tal que  $(p, a) = 1$ . Demuestre que  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  tiene solución si y sólo si  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Nombre y apellido:**

2) Halle un  $n$  que sea congruente con 2 módulo 25, con 3 módulo 7 y con 5 módulo 11.

**Nombre y apellido:**

3) Para llegar a C, desde A, hay que pasar por B. Hay dos caminos de A a B y dos caminos de B a C. Cada camino se encuentra bloqueado, por derrumbes, con probabilidad  $p$ , independientemente de los demás caminos.

a) Hallar la probabilidad de que en un momento dado, se pueda ir de A a C.

b) Hallar la probabilidad de que se pueda ir de A a B si se sabe que no se puede ir de A a C.

**Nombre y apellido:**

4) Evaluar los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{2/x}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$ .

**Nombre y apellido:**

5) Evaluar la integral indefinida  $\int \frac{1}{x + 5 + 5\sqrt{x + 1}} dx$ .

**Nombre y apellido:**

6) Sean  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$  y

$$f(z) = \int_C \frac{w^2 + 1}{w - z} dw$$

- a) Hallar  $f(1 + i)$ .
- b) Hallar  $f(3 - i)$ .

**Nombre y apellido:**

7) Considere la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2)$ .

1. Es  $T$  invertible?
2. Es  $T$  diagonalizable?
3. Si  $T$  es invertible encuentre la transformación lineal inversa  $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si  $T$  es diagonalizable encuentre una base para  $\mathbb{R}^3$  en la que la matriz de  $T$  es diagonal.



**Nombre y apellido:**

8) Sean  $S_n$  el grupo simétrico,  $\sigma \in S_n$  una transposición y  $\tau \in S_n$  un  $n$ -ciclo.  
Muestre que  $S_n$  es generado por  $\sigma$  y  $\tau$ .

**Nombre y apellido:**

9) Pruebe que si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua entonces  $f$  es uniformemente continua. Pruebe que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y  $|f'(x)| \leq M$  para algún  $M$  entonces  $f$  es uniformemente continua.

**Nombre y apellido:**

10) Encuentre la solución del problema de valores iniciales

$$y'' - 4y' - 12y = te^{4t}, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$