Departamento de Matemáticas — Universidad de los Andes

Examen de Área de Magister y Doctorado
ALGEBRA

Enero 17 de 2008

1. Sea G un grupo abeliano infinito finitamente generado y $T = \{g \in G : o(g) < \infty\}$. Muestre que G/T es abeliano libre y $G \approx T \times G/T$.

2. Sean p, q primos distintos. Muestre que un grupo G de orden pq posee al menos un subgrupo normal de Sylow. Muestre que si $p \not\equiv 1 \pmod q$ y $q \not\equiv 1 \pmod p$ entonces G es cíclico.

3. Sea A un anillo conmutativo con identidad y sea N el conjunto de los elementos nilpotentes de A. Muestre que N es la intersección de los ideales primos de A.

4. Sea $h : A \to A/I \times A/J$ el homomorfismo $h(x) = (x + I, x + J)$, donde I, J son ideales de un anillo A. Determine condiciones suficientes y necesarias (y demuéstre que lo son) para que h sea un isomorfismo.

5. Dados R-módulos izquierdos simples no triviales M y N, demuestre que son equivalentes:

   (a) Los únicos submódulos de $M \oplus N$ son 0, $0 \oplus N$, $M \oplus 0$ y $M \oplus N$.

   (b) M no es isomorfo a N.

6. Dado un espacio vectorial V con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$, muestre que la inyección natural $\phi : V \to V^*$ dada por $\phi(v) = \langle v,\ \rangle$ es un isomorfismo si y solamente si $\dim V < \infty$.

7. Sean $a_0, ..., a_n$ algebraicos sobre F y sea α una raiz del polinomio $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$. Muestre que α es algebraico sobre F.

8. Sea K una extensión de dimensión finita de F. Si $p(x) \in F[x]$ de grado n tiene n raices distintas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ en K. Muestre que $p(x)$ es irreducible sobre F si y sólo si para toda i, j existe un automorfismo $\sigma \in G(K/F)$ tal que $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$.