Examen de Área de Análisis

17 de junio 2009

Nota: Los tres primeros ejercicios son obligatorios. Escoger dos de los restantes.

1. Sea la sucesión real definida por u_0 dado y $u_n = \text{sen }(u_{n-1})$ para $n \geq 1$
   (a) Mostrar que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.
   (b) Considérese la función f_n sobre $\mathbb{R}$ definida por $f_n(u_0) = u_n$ Mostrar que la sucesión f_n converge uniformemente a la función nula sobre $\mathbb{R}$.

2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ con valores reales. Hallar, si existe,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos^n(\pi x)\, dx$$

3. Sea B la bola unitaria euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que si $p \geq q$ entonces $L^p(B) \subset L^q(B)$

4. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se define la función $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\, dx$$

   (a) Mostrar que $\hat{f}$ está bien definida y es continua sobre $\mathbb{R}$
   (b) ¿ Es $\hat{f}$ acotada?
   (c) Mostrar que si la función $x \to xf(x)$ está en $L^1(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f}$ es diferenciable y hallar una función g tal que $(\hat{f})' = \hat{g}$

5. Sea $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H tal que $\|e_i\| = 1$ para todo i y $\langle e_i, e_j\rangle = c$ para todo $i \neq j$ donde c es un real fijo.
   (a) Se define la sucesión $x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i$. Calcular $\langle x_n, x_m\rangle$ y mostrar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
   (b) Sea x el límite de x_n. Mostrar que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $y_n = e_n - x$ es ortogonal y que $\|y_n\|^2 = 1 - c$ para todo $n \geq 0$
   (c) Deducir que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en H

6. Sean $H = \ell^2(\mathbb{R})$, $L(H)$ el espacio de los operadores lineales continuos sobre H y $W(H)$ el conjunto de los operadores $A : H \to H$ tales que

$$(Ax)_i = \sum_{j\geq 1} a_{ij}x_j \text{donde } \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < \infty$$

   (a) Mostrar que $W \subset L(H)$
   (b) Mostrar que W es un subespacio vectorial de $L(H)$
   (c) Mostrar que $W \subset L_c(H)$ donde $L_c(H)$ es el espacio de los operadores compactos de H.