Examen de Area Análisis

1.
a. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales no negativos tales que $\sum a_n$ converge. Muestre que $\sum a_n^2$ converge.

b. Verdadero o falso: si $\sum a_n^2$ converge entonces $\sum \frac{a_n}{n}$ converge?

c. Asuma que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$. Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.

2.a. Considere el espacio $C^{\alpha}([0,1])$ de funciones $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ que satisfacen la siguiente condición:

$$\|f\|_{\alpha} := \|f\|_{\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < \infty.$$

Muestre que $C^{\alpha}([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_{\alpha}$ es un espacio de Banach (no debe mostrar que $\|f\|_{\alpha}$ es una norma, sólo que el espacio con la norma así definida es completo).

b. Muestre que el conjunto

$$A := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^2(\mathbf{N}) : |a_n| \leq n^{-1} \right\}$$

es compacto en $l^2(\mathbf{N})$ con su norma usual (i.e., $\left\| (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \right\| = \left(\sum |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$).

3.
a. Sea (X, μ) un espacio de medida finita y sea (f_n) una sucesión de funciones medibles tales que:
(i) $0 \leq f_n < 1$,
(ii) $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n = \mu(X)$.
Muestre que $f_n \to 1$ casi siempre (almost everywhere).

b. Sea $f \in L^1(\mathbf{R})$ (con la σ-álgebra y la medida de Lebesgue). Muestre que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(nx)\, dx = 0.$$

(Ayuda: empiece por probar que el resultado vale para funciones características de intervalos).

4. a. Encuentre un mapa conforme que envíe el disco unitario abierto del plano complejo en la banda

$$\{z \in \mathbf{C} : \, 0 < Re(z) < 1\}\,.$$

b. Calcule la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx.$$

5. Sea $(a_j)\, j \in l^\infty\,(\mathbf{N})$. Muestre que el operador

$$T : \, l^p\,(\mathbf{N}) \longrightarrow l^p\,(\mathbf{N})$$

dado por

$$T((x_j)_j) = (a_j x_j)_{j\in\mathbf{N}}\,,$$

es compacto si y sólo si $(a_j)_{j\in\mathbf{N}} \in c_0$.

Recuerde, $c_0 = \{(a_k)_{k\in\mathbf{N}} : \, \lim_{k\to\infty} a_k = 0\}\,.$