EXAMEN DE ÁREA EN ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

17 de junio de 2009

Parte 1 (50%):

En esta parte escoger UN problema entre el 1. y el 2. y UN problema entre el 3. y el 4.

1. .

   (a) Hallar la solución $u \equiv u(x,y)$ del siguiente problema de valor inicial en $\mathbb{R}^2_{x,y}$:

$$(*) \qquad \begin{cases} xuu_x + yuu_y = xy \\ u(1,y) = y^2, \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   (b) ¿Cuál es el mayor dominio ($\equiv$ abierto conexo) del plano en el cual está definida la solución del problema $(*)$ hallada en **a.**?

2. .

   (a) Dar la definición del espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, y describir su estructura de espacio de Hilbert.

   (b) Si $s, r \in \mathbb{R}$ son números reales arbitrarios, ¿qué relación de contención hay entre $H^s(\mathbb{R}^n)$ y $H^r(\mathbb{R}^n)$? [Justificar la respuesta].

   (c) Mostrar que si $s > \frac{n}{2}$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n)$, donde $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ representa al espacio de las funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ que tienden a cero en el infinito, con la norma del supremo. [Aquí $\hookrightarrow$ denota inclusión continua].

3. .

   (a) Calcular todas las soluciones en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, suaves, rotacionalmente simétricas, de la *ecuación de Laplace*: $\Delta u = 0$.

   (b) Verificar que todas las funciones halladas en **a.** pertenecen a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

   (c) Para alguna función particular (que usted escoja) u, no constante, de las halladas en **a.**, calcular el laplaciano Δu en el sentido de las distribuciones sobre $\mathbb{R}^3$ (se obtiene un múltiplo de la medida δ de Dirac). [*Sugerencia*: $\int_{\mathbb{R}^3} = \lim_{\epsilon \to 0, R \to \infty} \int_{\epsilon < |x| < R}$].

   (d) Deducir de **c.** una solución fundamental $E \in D'(\mathbb{R}^3)$ para el operador de Laplace Δ.

   (e) Sea $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dar una fórmula explícita de una solución u de la *ecuación de Poisson*: $\Delta u = g$. ¿Se tiene que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$? ¿por qué? [$C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ representa el espacio de las funciones C^∞ con soporte compacto en $\mathbb{R}^3$].

4. Recuérdese que si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{C}$ es una función rotacionalmente simétrica, se usa la notación: $f(x) = f(|x|) = f(r), r = |x|, x \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Demostrar que la fórmula: $v(t,r) = ru(t,x)$ define una correspondencia biunívoca entre las soluciones suaves $u \equiv u(t,x)$ rotacionalmente simétricas en la variable $x \in \mathbb{R}^3$ de la ecuación de onda tridimensional $u_{tt} = c^2 \Delta u$ y las soluciones suaves $v \equiv v(t,r)$, impares en la variable $r \in \mathbb{R}$, de la ecuación de onda unidimensional $v_{tt} = c^2 v_{rr}$.

   (b) Usando el resultado de **a.** y la fórmula de d'Alembert, dar la forma general de las soluciones suaves rotacionalmente simétricas $u(t,x)$ de la ecuación de onda tridimensional $u_{tt} = c^2 \Delta u$.

   (c) Calcular explícitamente la solución del siguiente problema de valor inicial para la ecuación de onda en $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x$:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & \text{en } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x \\ u(0,x) = 2|x|^2, \ u_t(0,x) = 4c & \text{en } \{t=0\} \times \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Parte 2 (50%):

En esta parte los 3 ejercicios son obligatorios.

1. Sea f una función 3 veces diferenciable sobre $\mathbb{R}$. Mostrar que dados $x_0 < x_1$, para todo x real existe un $\theta \in [x_0, x_1]$ tal que

$$f(x) = \frac{(x_1 - x)(x + x_1 - 2x_0)}{(x_1 - x_0)^2} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x_1 - x)}{x_1 - x_0} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2} f(x_1) + e(x)$$

donde

$$e(x) = \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)}{6} f^{(3)}(\theta)$$

Ayuda: Pensar en interpolación.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz invertible y $b \in \mathbb{R}^n$. Para resolver el sistema lineal

$$Ax = b,$$

se propone el método iterativo : x^0 dado y para $k \geq 0$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k)$$

donde α es un parámetro real.

   (a) Mostrar que el algoritmo converge si y solo si

$$\forall \lambda \in \text{esp}(A), \qquad \alpha(\alpha|\lambda|^2 - 2\Re(\lambda)) < 0.$$

   $\Re(z)$ denota la parte real de un número complejo z.

   (b) ¿ Existiría un α para el cual el método converge si $\text{esp}(A) = \{1 + i, -1 + i\}$?. Aquí $\text{esp}(A)$ denota el espectro de A.

   (c) Mostrar si A es simétrica definida entonces existe α tal que el algoritmo converge.

   (d) ¿ Cuál es el valor óptimo de α, siendo A simétrica definida positiva.

3. Consideramos el problema de frontera :

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1 \quad u(0) = 0, u'(1) = 1.$$

   (a) Hallar la formulación variacional del problema.

   (b) Haciendo aproximación en elementos finitos afines, escribir el sistema lineal que sale.