Exámen de área
Lógica
25 de mayo de 2012

1. Suponga que la estructura $\mathfrak{A}$ es elementalmente equivalente a la estructura $(\mathbb{N}, <, +, \cdot)$ (con el lenguaje $L = \{<, +, \cdot\}$ con un símbolo de relación binaria y dos símbolos de función binaria con la interpretación usual). Definimos una relación de equivalencia $\sim$ sobre el dominio A de $\mathfrak{A}$ por: $x \sim y$ si y solamente si hay un número finito de elementos de A entre x y y según el órden $<_{\mathfrak{A}}$.

   Las clases de equivalencia $A/\sim$ se ordenan naturalmente por la relación $[x]_\sim < [y]_\sim$ si y solo si $x <_{\mathfrak{A}} y$. Muestre que si $A/\sim$ tiene más de un elemento, entonces el orden de $A/\sim$ es denso y sin elemento maximal.

2. Muestre que hay un conjunto infinito X de sucesiónes finitas y binarias (es decir, cada $\sigma \in X$ es una sucesión $(a_1, \ldots, a_n)$ tal que cada a_i es igual a 0 ó 1) tal que:

   1. X es recursivo;
   2. si $(a_1, \ldots, a_n) \in X$ y $m \leq n$, entonces $(a_1, \ldots, a_m) \in X$; pero
   3. X no teine ninguna "rama recursiva": no existe ninguna sucesión $\sigma = (a_1, a_2, \ldots)$ que es infinita, binaria, y recursiva tal que para cada número n, la subsucesión $(a_1, \ldots, a_n)$ está en X.

   (Ayuda: existe una teoría T recursiva sin ninguna completación recursiva.)

3. Sea $L = \{U, V\}$ donde U y V son símbolos unarios de relación. Demuestre que hay un número contable de teorías completas en el lenguaje L.

4. 1. Pruebe que $\{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ es un ordinal limite y } cof(\alpha) = \omega\}$ es estacionario.
   2. Pruebe que si C_1 y C_2 son clubs de ω_1, $C_1 \cap C_2$ es un club.

5. Sea κ un ordinal regular no contable, sea $S \subset \kappa$ un conjunto estacionario y sea $f : S \to \kappa$ regresiva, es decir $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S$, $\alpha \neq 0$. Entonces existe $S_0 \subset S$ estacionario y $\gamma \in \kappa$ tal que $f(\alpha) = \gamma$ para todo $\alpha \in S_0$.