

Temas Examen de Conocimientos: ANÁLISIS

Departamento de Matemáticas

Universidad de Los Andes, 2021

1. Análisis Básico

- a) Espacios métricos y espacios normados.
- b) Convergencia en espacios métricos; sucesiones y series.
- c) Sucesiones y series en $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$. Criterios de convergencia.
- d) Continuidad de funciones. Continuidad uniforme. Teorema de valor intermedio. Propiedades de funciones continuas. Propiedades de funciones continuas con dominio compacto.
- e) Funciones Lipschitz-, Hölder-continuas.
- f) Diferenciabilidad de funciones. Propiedades de funciones diferenciables. Teorema del valor intermedio.
- g) Integral de Riemann y sus propiedades. Teorema fundamental de cálculo.
- h) Convergencia de sucesiones de funciones: Convergencia puntual; convergencia uniforme.
- i) Convergencia de series de funciones. Series de potencias. Series de Taylor.
- j) Teorema de aproximación de Stone-Weierstraß.
- k) Topología básica: conjuntos abiertos, cerrados, compactos, conexos. Continuidad de funciones entre espacios topológicos.

2. Teoría de Medida e Integración

- a) σ -álgebras. Espacios medibles. Espacios de medida. Medidas completas.
- b) σ -Álgebra de Borel. σ -Álgebra de Lebesgue.
- c) Medida de Lebesgue en (subconjuntos de) $\mathbb{R}$.
- d) Funciones medibles.
- e) Integral de Lebesgue. Comparación de la integral de Lebesgue con la integral de Riemann.
- f) Lema de Fatou; Teorema de convergencia monótona (Teorema de Beppo Levi); Teorema de la convergencia dominada (Teorema de Lebesgue).
- g) Espacios $L^p(\Omega)$.
- h) Teorema de representación de Riesz.
- i) Teorema de Fubini.
- j) Teorema de cambio de variable.
- k) Medidas signadas. Variación total.
- l) Medidas continuas/singulares con respecto a otra medida. Derivada de Radon-Nikodym.
- m) Funciones absolutamente continuas.

3. Análisis Funcional

- a) Espacios de Banach.

- b) Operadores lineales acotados. Norma de operadores.
- c) Operadores lineales compactos.
- d) Espacio dual. Teorema de Hahn-Banach y sus consecuencias.
- e) Operador adjunto.
- f) Convergencia débil.
- g) Topología débil y débil-*. Teorema de Banach-Alaoglu.
- h) Teorema de Banach-Steinhaus.
- i) Teorema del mapa abierto.
- j) Teorema de la gráfica cerrada.
- k) Convergencia de sucesiones de operadores (en norma de operadores; fuerte; débil).
- l) Espacios de Hilbert.
- m) Teorema de Riesz-Fréchet.
- n) Proyecciones ortogonales. Bases ortonormales. Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval.
- ñ) Operadores lineales entre espacios de Hilbert. Operadores adjuntos. Operadores simétricos y autoadjuntos. Operadores unitarios.
- o) Espectro de operadores en espacios de Hilbert. Espectro puntual, continuo, residual.
- p) Teorema espectral para operadores compactos.

4. Análisis Complejo

- a) Funciones holomorfas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann.
- b) Teorema de Cauchy. Fórmula de Cauchy.
- c) Teorema de Liouville.
- d) Principio de la identidad.
- e) Principio del máximo.
- f) Clasificación de singularidades aisladas de funciones holomorfas (removable, polo, esencial). Teorema de Casorati-Weierstraß.
- g) Series de Laurent
- h) Uso de residuos para evaluar integrales.
- i) Teorema de Rouché.

5. Misc

- a) Teorema de Arzelá-Ascoli.

Bibliografía.

- Abuabara Teófilo.; Lesmes Jaime. Elementos de Análisis Funcional. Ediciones Uniandes, 2010.
- Cohn, Donald L. Measure theory. Second edition. Birkhuser Advanced Texts: Basler Lehrbcher. Birkhuser/Springer, New York, 2013.
- Conway, John B. Functions of one complex variable. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

- Hewitt, Edwin; Stromberg, Karl. Real and abstract analysis. Third printing. Graduate Texts in Mathematics, No. 25. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
- Rudin, Walter. Principles of mathematical analysis. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.
- Rudin, Walter . Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.